Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie X non vide de $\mathbb{R}$; m un nombre réel donné et h_m la fonction définie sur X par $x \to h_m(x) = mx - f(x)$.

On note X^o l'ensemble des nombres réels m pour lesquels l'ensemble $h_m(X)$, ensemble des valeurs de la fonction h_m, est majoré; le nombre m appartient donc à X^o s'il existe un nombre réel M tel que

$$\forall x \in X : \quad mx - f(x) \leqslant M.$$

Lorsque X^o est non vide, on associe au couple (X, f) le couple (X^o, f^o) où f^o est la fonction définie sur X^o par l'égalité :

$$\forall m \in X^o : \quad f^o(m) = \sup h_m(X) = \sup_{x \in X} (mx - f(x)).$$

On rappelle que $\sup h_m(X)$ est le plus petit majorant de l'ensemble $h_m(X)$.

I *a.* Montrer que l'on a les inégalités (1) et (2) :

$$(1) \qquad \forall x \in X, \ \forall m \in X^o : \quad f(x) + f^o(m) \geqslant mx$$

$$(2) \qquad \forall x \in X : \quad f(x) \geqslant \sup_{m \in X^o} (mx - f^o(m))$$

b. Soient $m_1 \in X^o$ et $m_2 \in X^o$, montrer que l'intervalle $[m_1, m_2]$ est contenu dans X^o.

c. On suppose que X est un intervalle fermé, borné, de $\mathbb{R}$ soit $X = [a, b]$ et que f est une fonction continue sur X.

Déterminer X^o et montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que

$$f^o(m) = m x_0 - f(x_0).$$

II *a.* Déterminer (X^o, f^o) lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = e^x$.

Déterminer le couple (X^{oo}, f^{oo}) associé à (X^o, f^o), $X^{oo} = (X^o)^o$, $f^{oo} = (f^o)^o$.

b. Que peut-on dire de X^o lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$?

c. Soient α, β deux nombres réels donnés. Déterminer (X^o, f^o) puis (X^{oo}, f^{oo}) lorsque $X = \mathbb{R}$ et $f(x) = \alpha x - \beta$.

d. Déterminer (X^o, f^o) puis (X^{oo}, f^{oo}) lorsque X est l'ensemble fini $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ et f la fonction définie par $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$.

Représenter les fonctions f^o et f^{oo}.

III Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies respectivement sur les parties X et Y, non vides, de $\mathbb{R}$.

On dira que (X, f) minore (Y, g), ce que l'on notera $(X, f) \leqslant (Y, g)$ si on a les conditions

$$\begin{cases} Y \subseteq X \quad \text{et} \\ \forall x \in Y : \quad f(x) \leqslant g(x) \end{cases}$$

a. Montrer que la relation $(\leqslant)$ ainsi définie est une relation d'ordre partiel sur les couples (X, f), X étant non vide.

b. Montrer que $(X, f) \leqslant (Y, g)$ implique $(Y^o, g^o) \leqslant (X^o, f^o)$ lorsque X^o est non vide.

c. Soient m et p deux nombres réels donnés et $\varphi_{m,p}$ la fonction affine définie, pour tout x réel par :

$$x \to \varphi_{m,p}(x) = mx - p.$$

Montrer que l'on a $(\mathbb{R}, \varphi_{m,p}) \leqslant (X, f)$ si et seulement si $m \in X^o$ et $p \geqslant f^o(m)$.

Pour tout $m \in X^o$ on définit la fonction affine φ_m

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \to \varphi_m(x) = mx - f^o(m).$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \varphi_{m,p}) \leqslant (X, f)$ implique $(\mathbb{R}, \varphi_{m,p}) \leqslant (\mathbb{R}, \varphi_m)$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R} : \ \varphi_{m,p}(x) \leqslant \varphi_m(x)$.

Quelle interprétation géométrique, relative au graphe de la fonction f, peut-on donner de ces propriétés?

IV *a.* Soit $a > 0$ un nombre donné, $X = [-a, +a]$ et f la fonction définie sur X par $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Dessiner le graphe Γ de f et déterminer la droite passant par le point A de Γ d'abscisse $(-a)$, tangente à Γ en un point A', autre que A. Indiquer les coordonnées de A'.

Déterminer avec soin le couple (X^o, f^o) associé à (X, f).

Indiquer la valeur du nombre $\lambda = \inf_{m \in X^o} f^o(m)$.

Déterminer le couple (X^{oo}, f^{oo}) associé à (X^o, f^o).

Dessiner les graphes de f^o et de f^{oo}.

b. Soit (X, f) un couple donné $(X \neq \varnothing)$. Montrer que l'on a, lorsque X^o est non vide :

$$(X^{ooo}, f^{ooo}) = (X^o, f^o).$$

FIN

×I02×
E.N.S.I. CHIMIE GROUPE CENTRE
MATHEMATIQUES I (2 h30)
1977

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail